Karlsruher Institut für Technologie

Hochperformante Humanoide Technologien

Robotik I: Einführung in die Robotik
Kapitel 4 – Dynamik

Tamim Asfour

http://www.humanoids.kit.edu

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + g(\boldsymbol{q}) + \epsilon(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}})$$

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Robotermodelle – Überblick

- **Geometrisches Model**
  Geometrie: Mathematische Beschreibung der Form von Körpern

- **Kinematisches Model**
  Kinematik: Lehre der geometrischen und analytischen Beschreibung der Bewegungszustände mechanischer Systeme

- **Dynamisches Model**
  Dynamik: Untersuchung der Bewegung von Körpern als Folge der auf sie wirkenden Kräfte und Momente

Inhalt

- **Dynamisches Modell**
- Generalisierte Koordinaten
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler
- Herausforderungen der Dynamik

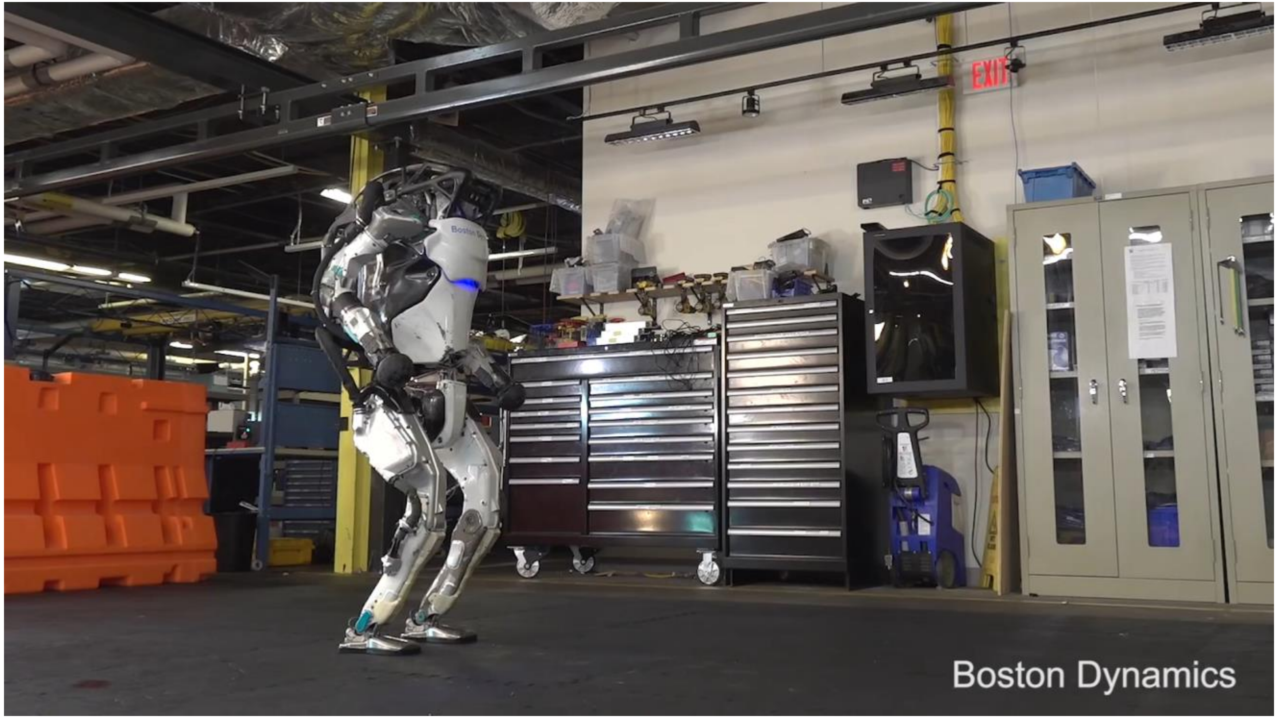
Dynamisches Modell: Definition & Zweck

- Definition:

> Ein dynamische Modell beschreibt den Zusammenhang zwischen Antriebs- und Kontaktkräfte, welche in einem mechanischen Mehrkörpersystem auftreten und deren resultierenden Beschleunigungen und Bewegungen.

- Zweck:
  - Analyse der Dynamik
  - Design und Synthese mechanischer Strukturen
  - Reglerentwurf und Steuerung (→ Inverse Dynamik)
  - Modellierung und Simulation (→ Vorwärtsdynamik)

Motivation



Boston Dynamics: https://www.youtube.com/watch?v=_sBBaNYex3E

Dynamisches Modell: Bewegungsgleichung

- Allgemeine Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + g(\boldsymbol{q}) + \epsilon(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})$$

$\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}$:	$n \times 1$	Vektor der generalisierten Koordinaten (Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung)
$\boldsymbol{\tau}$:	$n \times 1$	Vektor der generalisierten Kräfte
$M(\boldsymbol{q})$:	$n \times n$	Massenträgheitsmatrix (symmetrisch, positiv-definit)
$C(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$:	$n \times 1$	Vektor mit Zentripetal- und Corioliskomponenten
$g(\boldsymbol{q})$:	$n \times 1$	Vektor der Gravitationskomponenten
$\epsilon(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}})$:	$n \times 1$	Nichtlineare Effekte, wie z.B. Reibung (häufig vernachlässigt)

n: Bewegungsfeiheitsgrade des Roboters

Dynamisches Modell: Bewegungsgleichung

- Allgemeine Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + g(\boldsymbol{q}) + \epsilon(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}})$$

$\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}$:	$n \times 1$	Vektor der **generalisierten Koordinaten** (**Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung**)
$\boldsymbol{\tau}$:	$n \times 1$	Vektor der **generalisierten Kräfte**
$M(\boldsymbol{q})$:	$n \times n$	Massenträgheitsmatrix (symmetrisch, positiv-definit)
$C(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$:	$n \times 1$	Vektor mit Zentripetal- und Corioliskomponenten
$g(\boldsymbol{q})$:	$n \times 1$	Vektor der Gravitationskomponenten
$\epsilon(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}})$:	$n \times 1$	Nichtlineare Effekte, wie z.B. Reibung (häufig vernachlässigt)

Was sind generalisierte Koordinaten?

n: Bewegungsfeiheitsgrade des Roboters

Inhalt

- Dynamisches Modell
- **Generalisierte Koordinaten**
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler
- Herausforderungen der Dynamik

Generalisierte Koordinaten (1)

- Definition

> Minimaler Satz an voneinander unabhängigen Koordinaten, der den aktuellen Systemzustand vollständig beschreibt.

- Allgemeines Modell
  - Roboter besteht aus N Partikel mit Masse m_i und Koordinate $\boldsymbol{x_i}$
  - Für jeden Ortsvektor eines Partikels braucht man 3 Raumkoordinaten, insgesamt $\boldsymbol{3N}$ **Koordinaten**, um das System zu beschreiben
  - Newtons zweites Gesetz: $\boldsymbol{F}_i = m_i \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}_i$ mit $i = 1, \dots, N$
  - Partikel können sich wegen Verbindungen und Gelenken nicht unabhängig voneinander bewegen

→ Einführung von **Zwangsbedingungen (constraints)**

Generalisierte Koordinaten (2)

- **Holonome Zwangsbedingungen** können als Gleichungen zwischen den Koordinaten $\boldsymbol{x_i}$ formuliert werden (k: Anzahl der Zwangsbedingungen):

$$f_j(x_1, \ldots, x_{3N}) = 0 \qquad\qquad j = 1, \ldots, k$$

- Die $3N$ Koordinaten lassen sich mit k unabhängigen Zwangsbedingungen auf $\boldsymbol{n = 3N - k}$ unabhängige **generalisierte Koordinaten** $\boldsymbol{q_i}$ reduzieren, die automatisch die Zwangsbedingungen erfüllen müssen:

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_n) \qquad i = 1, \ldots, 3N \quad \text{und} \quad n = 3N - k$$

$$f_j(q_1, \ldots, q_n) = 0 \qquad j = 1, \ldots, k \quad \text{und} \quad n = 3N - k$$

Generalisierte Koordinaten: 2D Pendel

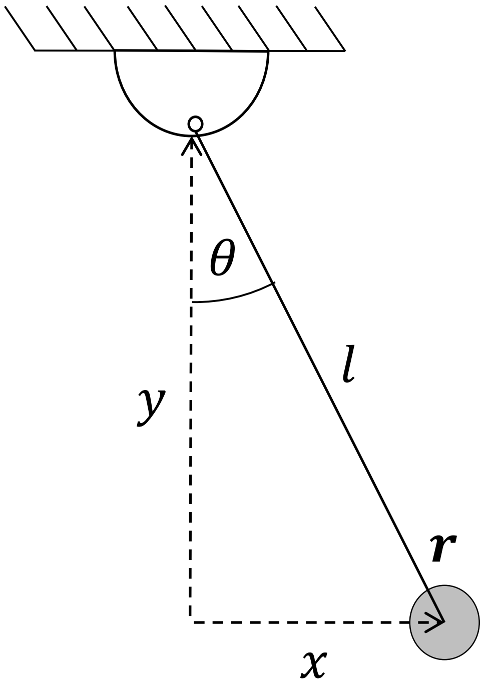
- Der Stab eines **ebenen Pendels (2D)** soll stets die **Länge l** besitzen, muss also nach Pythagoras folgende Zwangsbedingung ($k = 1$) erfüllen:

$$f_1(x_1, x_2) = 0 \qquad x_1 = x,\ x_2 = y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

- Es gibt nur eine **generalisierte Koordinate q**, da $n = 2N - k = 1$. Die Koordinaten x, y des Massenmittelpunkts $\boldsymbol{r}$ hängen von θ ab:

$$x = l \cdot \sin\theta \qquad y = l \cdot \cos\theta \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r} = f(q) = l \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



Generalisierte Koordinaten: 2D Pendel

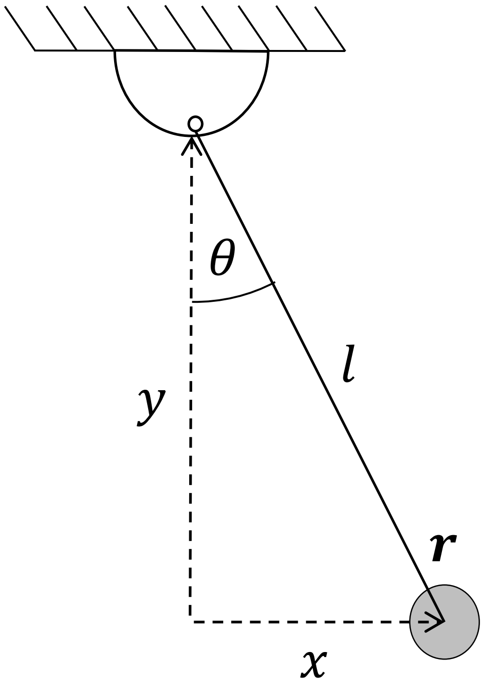
- Die generalisierte Koordinate erfüllt automatisch die Zwangsbedingung:

$$(l \cdot \sin\theta)^2 + (l \cdot \cos\theta)^2 - l^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow l^2 \cdot (\sin^2\theta + \cos^2\theta - 1) = 0$$

- Da allgemein gilt:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$



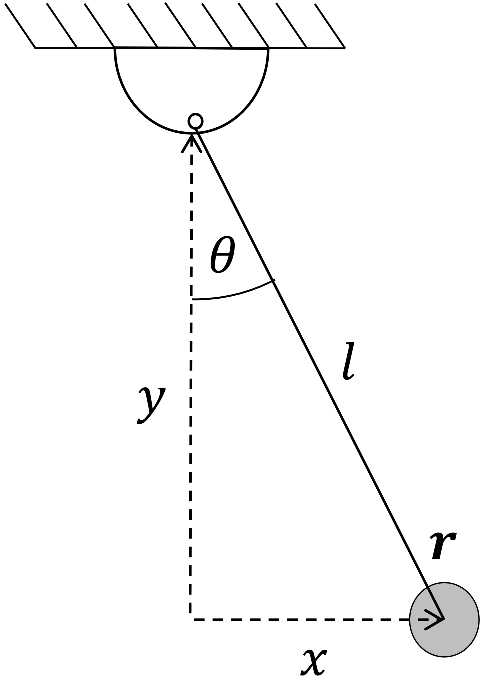
Generalisierte Koordinaten: 3D Pendel

- Position der Masse: $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- Zwangsbedingung ($k = 1$) auf Kugeloberfläche

$$|\boldsymbol{r}| = l \Leftrightarrow |\boldsymbol{r}| - l = 0$$
$$f_1(\boldsymbol{r}) = |\boldsymbol{r}| - l = 0$$

- Generalisierte Koordinaten ($n = 3N - k = 2$): $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{q}) = l \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$



Generalisierte Koordinaten: Beispiel

$$|\boldsymbol{r}| - l = 0 \Rightarrow |\boldsymbol{r}|^{\mathbf{2}} - l^2 = 0$$

$$\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{q}) = l \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$|\boldsymbol{r}|^{\mathbf{2}} =$

Generalisierte Koordinaten: Beispiel

$$|\boldsymbol{r}| - l = 0 \Rightarrow |\boldsymbol{r}|^{\mathbf{2}} - l^2 = 0$$

$$\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{q}) = l \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{r}|^{\mathbf{2}} &= l^2 \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ -\cos\theta \end{pmatrix}^2 \\ &= l^2 \cdot (\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta) \\ &= l^2 \cdot (\sin^2\theta \cdot (\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \cos^2\theta) \\ &= l^2 \cdot (\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= l^2 \end{aligned}$$

Dynamisches Modell: Bewegungsgleichung

- Allgemeine Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + g(\boldsymbol{q}) + \epsilon(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})$$

$\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}$:	$n \times 1$	Vektor der **generalisierten Koordinaten** (**Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung**)
$\boldsymbol{\tau}$:	$n \times 1$	Vektor der **generalisierten Kräfte**
$M(\boldsymbol{q})$:	$n \times n$	Massenträgheitsmatrix (symmetrisch, positiv-definit)
$C(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$:	$n \times 1$	Vektor mit Zentripetal- und Corioliskomponenten
$g(\boldsymbol{q})$:	$n \times 1$	Vektor der Gravitationskomponenten
$\epsilon(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})$:	$n \times 1$	Nichtlineare Effekte, wie z.B. Reibung (häufig vernachlässigt)

n: Freiheitsgrade des Roboters

Direktes Dynamisches Problem

- Aus äußeren Kräften und Momenten sowie Anfangszustand werden, unter Verwendung des dynamischen Modells, die sich ergebenden Bewegungsänderungen berechnet.

Geg.: $\boldsymbol{\tau}(t)$ → **Direktes dynamisches Problem** → Ges.: $\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), \ddot{\boldsymbol{q}}(t)$

Geg.: $\boldsymbol{q}(t_0), \dot{\boldsymbol{q}}(t_0), \ddot{\boldsymbol{q}}(t_0)$ ↑ **Direktes dynamisches Problem**

Anfangswertproblem der Mechanik

$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + g(\boldsymbol{q})$ (Nichtlineare Effekte vernachlässigt)

→ Differentialgleichung nach $q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)$ lösen

Inverses Dynamisches Problem

- Aus den gewünschten Bewegungsparametern sollen, unter Verwendung des dynamischen Modells, die dazu erforderlichen Stellkräfte und -momente ermittelt werden.

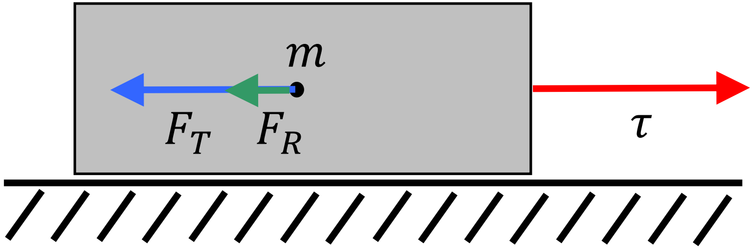
Geg.: $\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), \ddot{\boldsymbol{q}}(t)$ → **Inverses dynamisches Problem** → Ges.: $\boldsymbol{\tau}(t)$

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + g(\boldsymbol{q})$$

(Nichtlineare Effekte vernachlässigt)

Rechten Teil der Gleichung berechnen durch Einsetzen

Dynamisches Modell: Beispiel



$F_T = -m\ddot{x}$ Trägheit

$F_R = -K_{GR}\dot{x}$ Gleitreibung

τ Externe Kraft

- Kräftebilanz: $\tau = -(F_T + F_R)$
- Bewegungsgleichung: $\tau = m\ddot{x} + K_{GR}\dot{x}$
- **Inverses Problem:** Gegeben Bewegungszustand, welche externe Kraft τ wirkt auf das System bzw. wird benötigt, um den Bewegungszustand zu halten?
- **Direktes Problem:** Gegeben externe Kraft und aktueller Bewegungszustand, was ist die neue Bewegung (bzw. Beschleunigung) des Systems?

Inhalt

- Dynamisches Modell
- Generalisierte Koordinaten
- **Modellierung der Dynamik**
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler
- Herausforderungen der Dynamik

Modellierung der Dynamik

- Es gibt verschiedene Methoden, um die Terme der allgemeinen Bewegungsgleichung abzuleiten:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + g(\boldsymbol{q})}$$

- **Lagrange**
  - Arbeits- oder Energiebetrachtungen des Gesamtsystems
  - Bewegungsgleichungen durch formales Ableiten

- **Newton-Euler**
  - Basiert auf den Newton- und Euler-Gleichungen für starre Körper
  - Isoliertes Betrachten der Armelemente
  - Effiziente Methode durch rekursiven Algorithmus

Inhalt

- Dynamisches Modell
- Generalisierte Koordinaten
- Modellierung der Dynamik
  - **Methode nach Lagrange**
  - Methode nach Newton-Euler
- Herausforderungen der Dynamik

Methode nach Lagrange

- Lagrange-Funktion:

$$\boxed{L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = E_{kin}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - E_{pot}(\boldsymbol{q})}$$

- Die Bewegungsgleichung kann mithilfe der Lagrange-Funktion für jede generalisierte Koordinate abgeleitet werden:

$$\boxed{\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}}$$

q_i: i-te Komponente der generalisierten Koordinaten
τ_i: i-te Komponente der generalisierten Kräfte

Methode nach Lagrange

- Die resultierende Gleichung kann in skalarer Form geschrieben werden:

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\,\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ijk}\,\dot{q}_j\dot{q}_k + g(q)$$

C_{ijk}: Christoffelsymbole erster Ordnung

$$C_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i}\right)$$

Methode nach Lagrange: Vorgehen

- **Ziel:** Ermittle für jedes Gelenk i eines Roboters die Bewegungsgleichung

$$\boxed{\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}}$$

- **Vorgehen**:
  1. Berechne E_{kin} und E_{pot}
  2. Drücke E_{kin} und E_{pot} in generalisierten Koordinaten aus

$$\boxed{L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = E_{kin}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - E_{pot}(\boldsymbol{q})}$$

  3. Berechne die Ableitungen

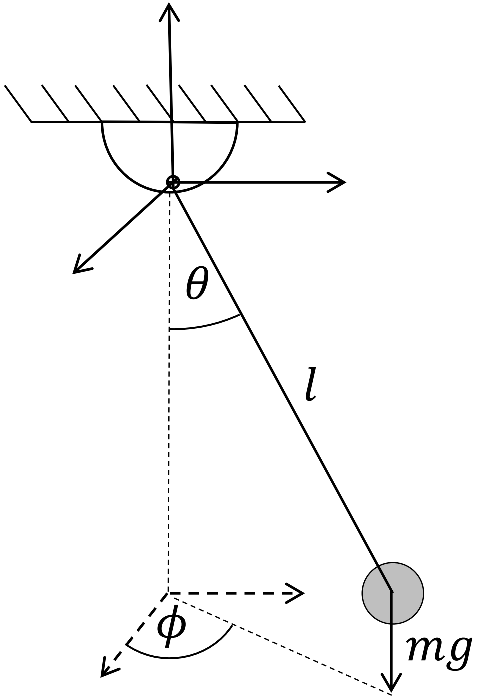
Methode nach Lagrange: 3D-Pendel (1)

- 3D-Pendel mit Gravitation
  (siehe Beispiel generalisierte Koordinaten)

- $\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{q}) = l \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$

- $E_{kin} = \frac{1}{2} m |\dot{\boldsymbol{r}}|^2 = \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cdot \sin^2\theta\right)$

- $E_{pot} = m \cdot g \cdot h = mg \cdot (-l \cdot \cos\theta)$



$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow \dot{f}(x) = u(x) \cdot \dot{v}(x) + \dot{u}(x) \cdot v(x)$

Methode nach Lagrange: 3D-Pendel (2)

- Lagrange-Funktion mit $\boldsymbol{q} = (\theta, \phi)$

$$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = E_{kin}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - E_{pot}(\boldsymbol{q})$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cdot \sin^2 \theta\right) + mgl \cdot \cos\theta$$

- Ableiten:

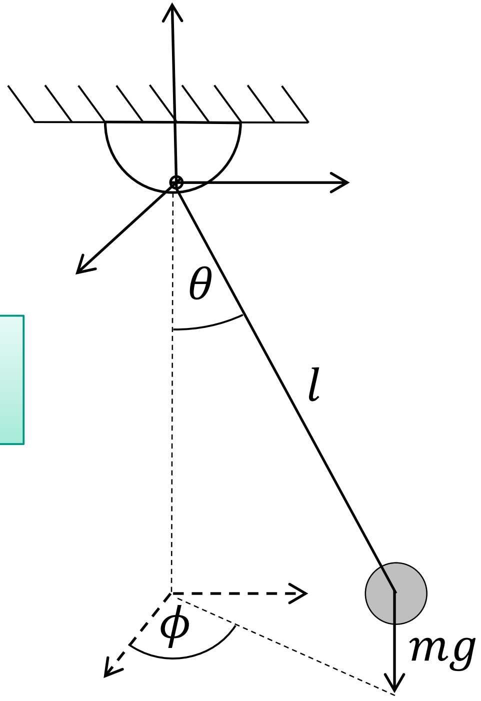
$$\boxed{\boldsymbol{\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2 \sin\theta \cos\theta \cdot \dot{\phi}^2 - mgl \cdot \sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(ml^2 \dot{\theta}\right) = ml^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{d}{dt}\left(ml^2\, \dot{\phi} \cdot \sin^2\theta\right) = ml^2 \sin^2\theta \cdot \ddot{\phi} + 2ml^2 \sin\theta\cos\theta \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\phi}$$



Methode nach Lagrange: 3D-Pendel (2)

Karlsruher Institut für Technologie

$$\boldsymbol{\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2 \sin\theta \cos\theta \cdot \dot{\phi}^2 - mgl \cdot \sin\theta$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}\right) = ml^2\ddot{\theta}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{d}{dt}\left(ml^2\,\dot{\phi} \cdot \sin^2\theta\right) = ml^2 \sin^2\theta \cdot \ddot{\phi} + 2ml^2 \sin\theta\cos\theta \cdot \dot{\theta}\dot{\phi}$$

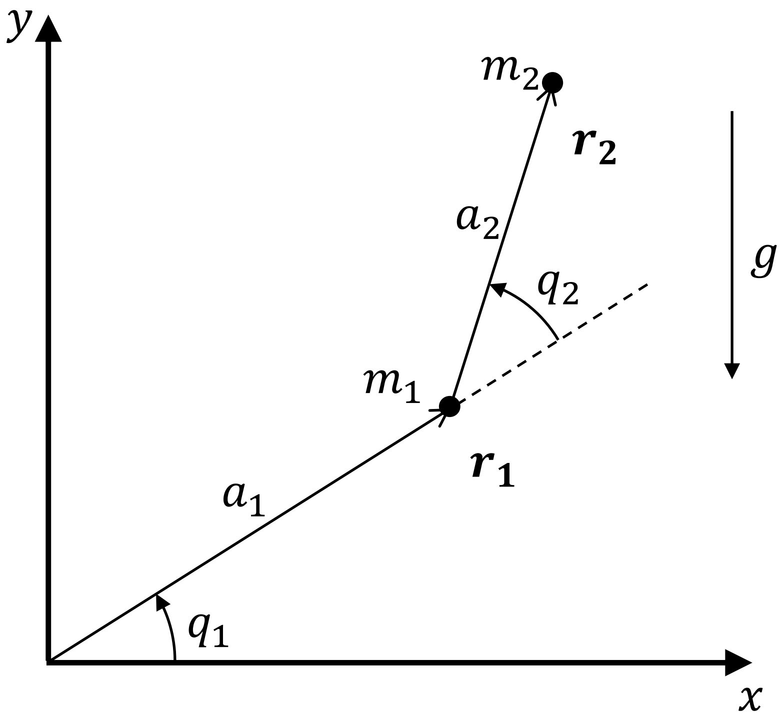
- Struktur der allgemeinen Bewegungsgleichungen

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + g(\boldsymbol{q})$$

- Bewegungsgleichung des 3D-Pendels (Keine externen Kräfte -> $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{0}$)

$$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2\sin^2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ml^2\sin\theta\cos\theta \cdot \dot{\phi}^2 \\ 2ml^2\sin\theta\cos\theta \cdot \dot{\theta}\dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgl\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (1)

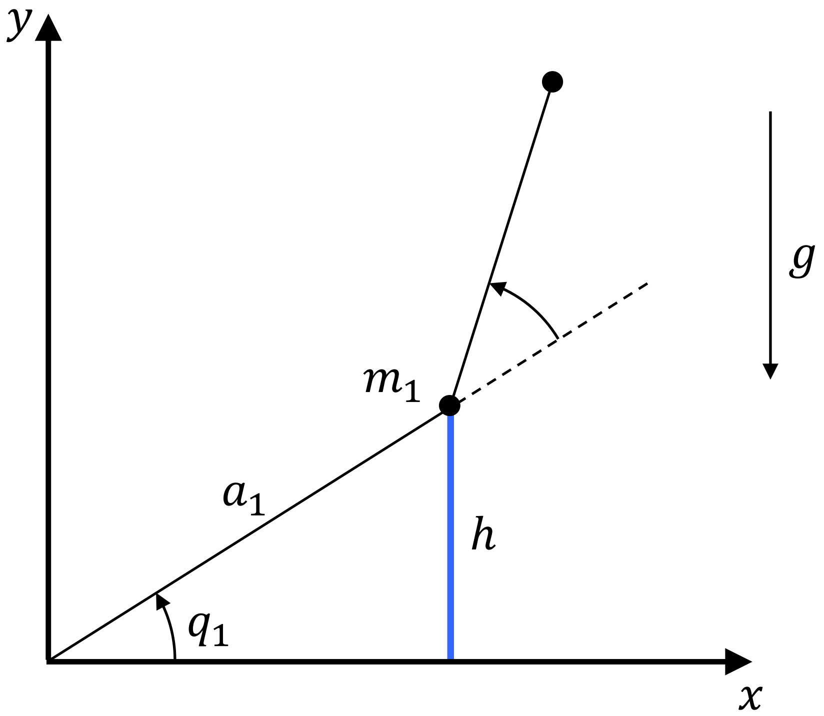


- Idealisierung:
  - Masse der Armelemente als Punktmassen in m_1 und m_2
  - Keine Reibung
- Einschränkungen des Systems ($k = 2$):
  - $f_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = |\boldsymbol{r}_1|^2 - a_1^2 = 0$
  - $f_2(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^2 - a_2^2 = 0$

→$n = 2N - k = 2$

→Generalisierte Koordinaten q_1, q_2

Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (2)

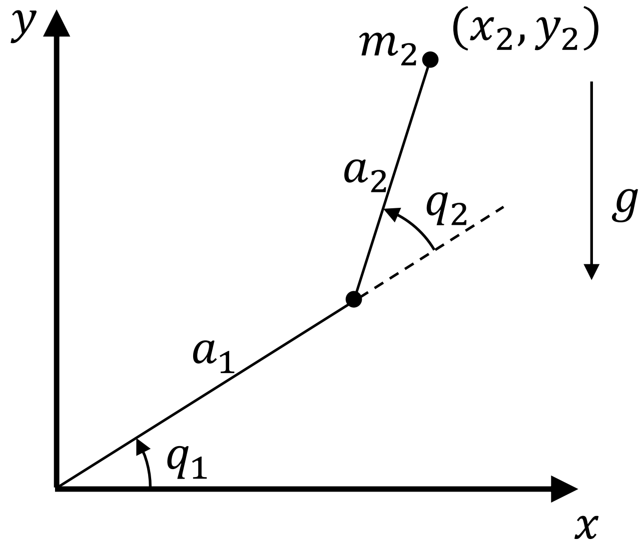


- Gelenk 1:

$$E_{kin,1} = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 a_1^2 \dot{q_1}^2$$

$$E_{pot,1} = m_1 g h = m_1 g a_1 \sin(q_1)$$

Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (3)



- Gelenk 2:

Position:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2) \\ a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeit:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \dot{q}_1 \sin(q_1) - a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\sin(q_1 + q_2) \\ a_1 \dot{q}_1 \cos(q_1) + a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (4)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1\dot{q}_1 \sin(q_1) - a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\sin(q_1 + q_2) \\ a_1\dot{q}_1 \cos(q_1) + a_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

- Gelenk 2:
  - Kinetische Energie:
    $$v_2{}^2 = \dot{x}_2{}^2 + \dot{y}_2{}^2 = a_1{}^2\dot{q}_1{}^2 + a_2{}^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2a_1a_2\left(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2\right)\cos(q_2)$$
    $$E_{kin,2} = \frac{1}{2}m_2v_2{}^2 = \frac{1}{2}m_2a_1{}^2\dot{q}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2a_2{}^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2a_1a_2\left(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2\right)\cos(q_2)$$
  - Potentielle Energie:
    $$E_{pot,2} = m_2gy_2 = m_2g[a_1\sin(q_1) + a_2\sin(q_1 + q_2)]$$
  - Lagrange-Funktion:
    $$L = E_{kin} - E_{pot} = E_{kin,1} + E_{kin,2} - E_{pot,1} - E_{pot,2}$$
    $$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)a_1{}^2\dot{q}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2a_2{}^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2a_1a_2\left(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2\right)\cos(q_2)$$
    $$-(m_1 + m_2)ga_1\sin(q_1) - m_2ga_2\sin(q_1 + q_2)$$

Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (5)

- Bewegungsgleichung
  - Gelenk 1:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1 + m_2){a_1}^2\dot{q}_1 + m_2{a_2}^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2 a_1 a_2(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\cos(q_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = (m_1 + m_2){a_1}^2\ddot{q}_1 + m_2{a_2}^2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 a_1 a_2(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)\cos(q_2)$$
$$-m_2 a_1 a_2\left(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + {\dot{q}_2}^2\right)\sin(q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -(m_1 + \mathrm{m}_2)g a_1 \cos(q_1) - m_2 g a_2 \cos(q_1 + q_2)$$

Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (5)

- Bewegungsgleichung
  - Gelenk 2:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 {a_2}^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2 a_1 a_2 \dot{q}_1 \cos(q_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = m_2 {a_2}^2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 a_1 a_2 \ddot{q}_1 \cos(q_2) - m_2 a_1 a_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2 a_1 a_2\left({\dot{q}_1}^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2\right)\sin(q_2) - m_2 g a_2 \cos(q_1 + q_2)$$

Lagrange-Beispiel: Zwei Drehgelenke (6)

- Bewegungsgleichung:

$$\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(m_1+m_2){a_1}^2 + m_2{a_2}^2 + 2m_2a_1a_2\cos(q_2) & m_2{a_2}^2 + m_2a_1a_2\cos(q_2)\\ m_2{a_2}^2 + m_2a_1a_2\cos(q_2) & m_2{a_2}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}-m_2a_1a_2(2\dot{q}_1\dot{q}_2+{\dot{q}_2}^2)\sin(q_2)\\ m_2a_1a_2{\dot{q}_1}^2\sin(q_2)\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}(m_1+m_2)ga_1\cos(q_1)+m_2ga_2\cos(q_1+q_2)\\ m_2ga_2\cos(q_1+q_2)\end{bmatrix}$$

- Zusammengefasst:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + g(\boldsymbol{q})}$$

Methode nach Lagrange: Zusammenfassung

- Zur Ermittlung der Bewegungsgleichungen muss die kinetische und die potentielle Energie aufgestellt werden. Daraus kann die Lagrange-Funktion berechnet werden.

$$\boxed{L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = E_{kin}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - E_{pot}(\boldsymbol{q})}$$

- Die Bewegungsgleichungen folgenden dann formal durch das Differenzieren:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau_i} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left(\frac{\boldsymbol{\partial L}}{\boldsymbol{\partial \dot{q}_i}}\right) - \frac{\boldsymbol{\partial L}}{\boldsymbol{\partial q_i}}}$$

Methode nach Lagrange: Eigenschaften

Eigenschaften

- Einfaches Aufstellen der Gleichungen
- Geschlossenes Modell, analytisch auswertbar
- Berechnung sehr umfangreich $O(n^3)$
  (n : Anzahl der Gelenke)
- Nur Antriebsmomente werden berechnet

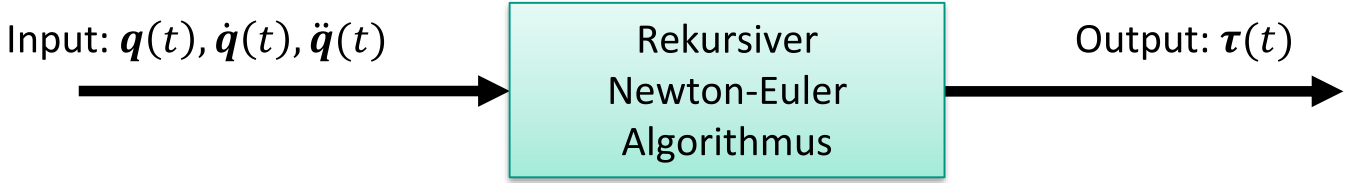
Inhalt

- Dynamisches Modell
- Generalisierte Koordinaten
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - **Methode nach Newton-Euler**
- Herausforderungen der Dynamik

Methode nach Newton-Euler

Karlsruher Institut für Technologie

- **Idee:** Kräfte und Momente, welche auf ein Armelement wirken, lassen sich mithilfe des **rekursiven Newton-Euler Algorithmus (RNEA)** aus den Gelenkwinkelpositionen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen berechnen



- **Eigenschaften**
  - Isoliertes Betrachten der Armelemente
  - Effiziente Berechnung in Echtzeit mit **Komplexität $\boldsymbol{O(n)}$** durch rekursiven Algorithmus möglich

H2T

Newton-Euler: Mathematische Grundlagen

- Das **Trägheitsmoment** eines starren Körpers **bei einer rotierenden Bewegung** ist vergleichbar mit der **Masse** bei einer linearen Bewegung:
  - Translationsbewegung: **Kraft** = *Masse · Beschleunigung* (Zweites Newtonsches Gesetz)

$$\boldsymbol{f} = m \cdot \boldsymbol{a} = m \cdot \dot{\boldsymbol{v}}_c = m \cdot \ddot{\boldsymbol{c}}$$

  - Rotationsbewegung: **Drehmoment** = *Trägheitsmoment · Winkelbeschleunigung* (Drehimpulssatz)

$$\boldsymbol{M} = \bar{\boldsymbol{I}}^{CoM}\boldsymbol{\alpha} = \bar{\boldsymbol{I}}^{CoM}\dot{\boldsymbol{\omega}}$$

CoM: Center of Mass

Newton-Euler: Euler'sche Bewegungsgleichung

- Wird ein Körper einem Drehmoment ausgesetzt, entwickeln sich **Kreiselwirkungen** (Eulerkräfte und Zentrifugalkräfte an allen Massenpunkten)

- Die Drehmomente können aufsummiert und durch die **Euler'sche Bewegungsgleichung** für starre Körper beschrieben werden:

$$\boldsymbol{n}_{CoM} = \bar{\boldsymbol{I}}^{CoM}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \bar{\boldsymbol{I}}^{CoM}\boldsymbol{\omega}$$

$\boldsymbol{n}_{CoM}$: Drehmomente um den Massenschwerpunkt CoM
$\bar{\boldsymbol{I}}^{CoM}$: Trägheitsmomente um den Massenschwerpunkt
$\boldsymbol{\omega}$: Winkelgeschwindigkeiten des starren Körpers
$\dot{\boldsymbol{\omega}}$: Winkelbeschleunigungen (Ableitung von $\boldsymbol{\omega}$ nach der Zeit)

Newton-Euler Bewegungsgleichung

- Die **Newton-Euler Gleichungen**, welche die vollständige Bewegung eines **starren Körpers** beschreiben, können in Form einer einzelnen Gleichung ausgedrückt werden:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_{COM} \\ \boldsymbol{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{I}}^{CoM}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \bar{\boldsymbol{I}}^{CoM}\boldsymbol{\omega} \\ m\ddot{\boldsymbol{c}} \end{pmatrix}}$$

- Vereinfacht formuliert:

$$\boxed{\mathbf{f} = \boldsymbol{I}\mathbf{a} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{I}\mathbf{v}}$$

wobei

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_{COM} \\ \boldsymbol{f} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v}_C \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\boldsymbol{v}}_C \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{v}_C$: Lineare Geschwindigkeit des Körpers in Bezug auf CoM
$\dot{\boldsymbol{v}}_C$: Lineare Beschleunigung des Körpers in Bezug auf CoM
$\mathbf{f}, \mathbf{v}, \mathbf{a}$: 6D Kraft- bzw. Bewegungsvektoren, welche alle auf den Körper wirkenden Kräfte und Bewegungen (Geschwindigkeit, Beschleunigung) beschreiben

Newton-Euler: Grundprinzip

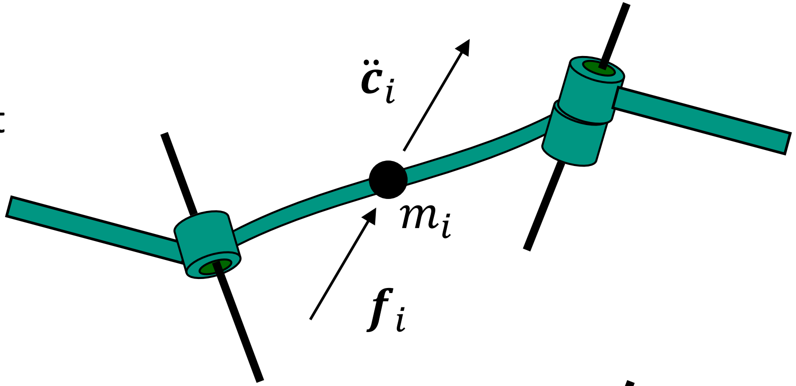
- Betrachtung des Massenzentrums eines einzelnen Armelementes
  - **Kraft = Änderung des Impulses** -> Impuls abgeleitet nach Zeit (Zweites Newtonsches Gesetz)

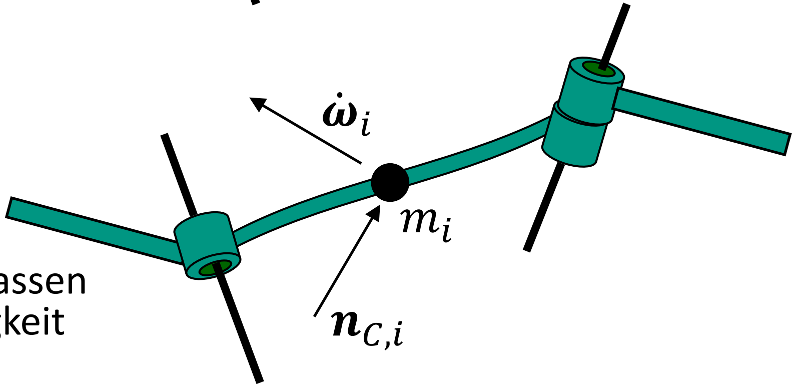
$$\boldsymbol{f}_i = \frac{d}{dt}\left(m_i\, \boldsymbol{v}_{C,i}\right) = m_i \ddot{\boldsymbol{c}}_i$$

  - **Drehmoment = Änderung des Drehimpulses** -> Drehimpuls abgeleitet nach Zeit + Drehmoment der Kreiselwirkungen (Euler'sche Bewegungsgl.)

$$\boldsymbol{n}_{C,i} = \frac{d}{dt}\left(I_i\, \boldsymbol{\omega}_i\right) + \boldsymbol{\omega}_i \times I_i\, \boldsymbol{\omega}_i$$
$$= I_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times I_i\, \boldsymbol{\omega}_i$$

- Kräfte und Momente, die auf ein Armelement wirken, lassen sich aus Geschwindigkeit und Gelenkwinkelgeschwindigkeit berechnen.





Newton-Euler: Verkettung

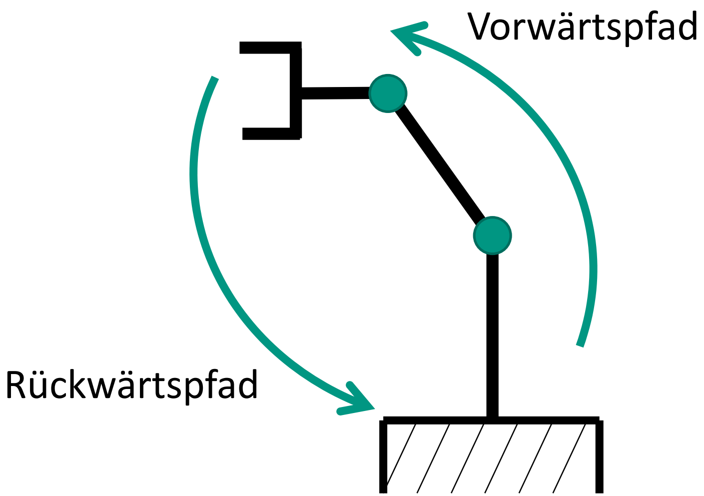
- Die Beschleunigungen $\ddot{\boldsymbol{c}}_i$ und $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{i}}$ eines Armelementes i hängen von den Beschleunigungen der **vorhergehenden** Armelemente ab.
  - Beschleunigungen können über kinematisches Modell **von der Basis zum Greifer** rekursiv berechnet werden -> **Vorwärtsgleichungen**

- Die Kraft $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{i}}$ und das Drehmoment $\boldsymbol{n}_{C,i}$, die auf ein Armelement i wirken, hängen von den **nachfolgenden** Armelementen ab.
  - Kräfte und Momente können **vom Greifer zur Basis** rekursiv berechnet werden **-> Rückwärtsgleichungen**

→ **Rekursiver Newton-Euler Algorithmus (RNEA)**

Rekursiver Newton-Euler Algorithmus (RNEA)

- Allgemeines Vorgehen:
  1. Rekursive Berechnung der **Geschwindigkeit** und **Beschleunigung** für jedes einzelne Armelements von der Basis bis zum Endeffektor (**Vorwärtspfad**)
  2. Berechnung der **Kräfte/Momente** mithilfe **Newton-Euler**, welche auf jedes einzelne Armelement wirken bzw. welche für die Beschleunigungen benötigt werden
  3. Rekursive Berechnung/Aufsummierung der Kräfte **über alle Armelemente** und der **Gelenkkraftvariablen** für den jeweiligen Gelenktyp (**Rückwärtspfad**)



RNEA: Schritt 1

- Rekursive Berechnung der **Geschwindigkeit** und **Beschleunigung** jedes einzelnen Armelements i von der Basis bis zum Endeffektor (**Vorwärtspfad**)

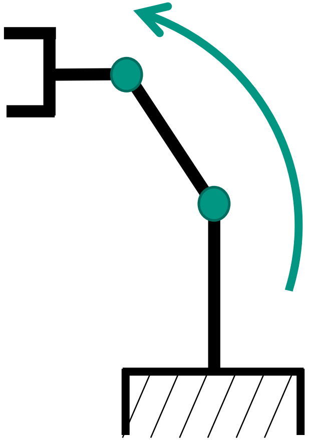
  - **Geschwindigkeit** $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{p(i)} + \boldsymbol{\phi}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i$

    $\dot{\boldsymbol{q}}_i$: Generalisierte Geschwindigkeit des Armelements i
    $\boldsymbol{\phi}_i$: $6 \times n$ Bewegungsmatrix (Abhängig vom Gelenktyp)
    $\mathbf{v}_{p(i)}$: Geschwindigkeit des Vorgängerelements $p(i)$

  - **Beschleunigung** $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{p(i)} + \boldsymbol{\phi}_i \ddot{\boldsymbol{q}}_i + \dot{\boldsymbol{\phi}}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i$

    $\ddot{\boldsymbol{q}}_i$: Generalisierte Beschleunigung des Armelements i
    $\dot{\boldsymbol{\phi}}_i$: Ableitung von $\boldsymbol{\phi}_i$

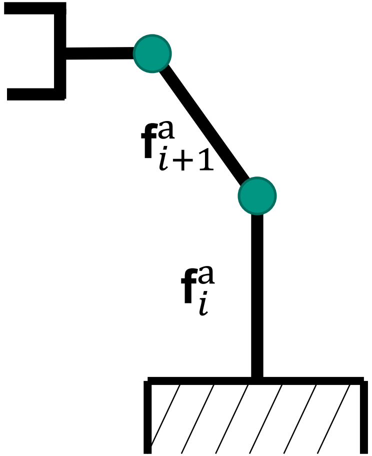
Vorwärtspfad



RNEA: Schritt 2

- Berechnung der **Kräfte/Momente** mithilfe der **Newton-Euler Gleichung**, welche aufgrund der Beschleunigung (aus Schritt 1) auf jedes einzelne Armelement i wirken

$$\mathbf{f}_i^{\mathrm{a}} = \boldsymbol{I}_i \mathbf{a}_i + \mathbf{v}_i \times \boldsymbol{I}_i \mathbf{v}_i$$

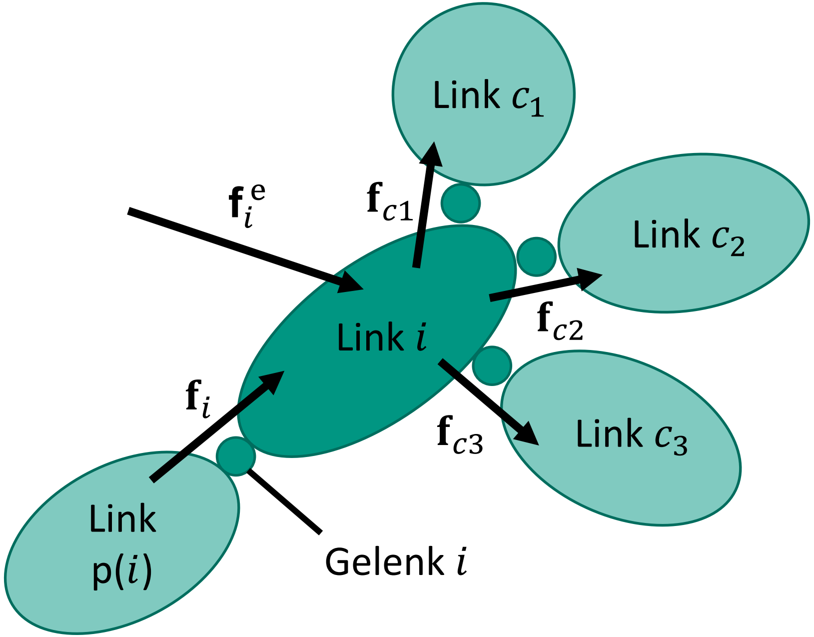


$\mathbf{f}_i^{\mathrm{a}}$: Kräfte, welche aufgrund von $\mathbf{a}_i$ auf das Armelement i wirken
$\boldsymbol{I}_i$: Trägheitsmoment des Armelements i
$\mathbf{v}_i$: Geschwindigkeit des Armelements i (in Schritt 1 berechnet)
$\mathbf{a}_i$: Beschleunigung des Armelements i (in Schritt 1 berechnet)

RNEA: Schritt 3

- Rekursive Berechnung/Aufsummierung der Kräfte **zwischen den Armelementen (Links)** und der **Gelenkkraftvariablen** für den jeweiligen Gelenktyp (**Rückwärtspfad**)

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^{\mathrm{a}} - \mathbf{f}_i^{\mathbf{e}} + \sum_{j \,\epsilon\, c(i)} \mathbf{f}_j$$

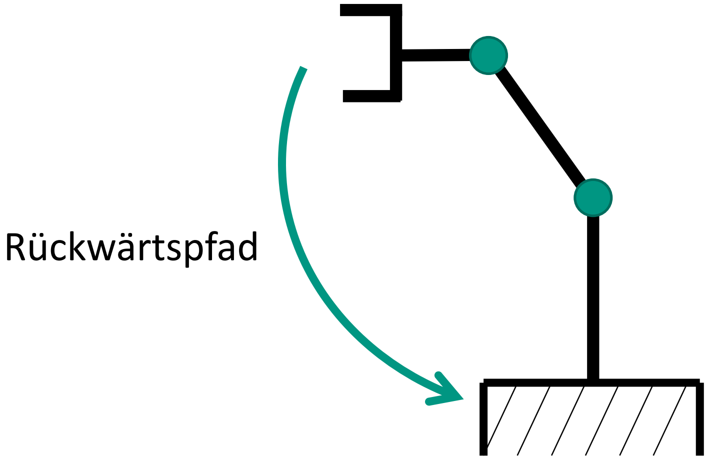


RNEA: Schritt 3

- Rekursive Berechnung/Aufsummierung der Kräfte **zwischen den Armelementen (Links)** und der **Gelenkkraftvariablen** für den jeweiligen Gelenktyp (**Rückwärtspfad**)

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^{\mathrm{a}} - \mathbf{f}_i^{\mathbf{e}} + \sum_{j \,\epsilon\, c(i)} \mathbf{f}_j$$

$$\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{f}_i$$



$\mathbf{f}_i$: Resultierende Kraft am Armelement i
$\mathbf{f}_i^{\mathbf{e}}$: Summe aller externen Kräfte, die an i wirken
$\mathbf{f}_j$: Kraft eines anliegenden Armelementes j
$c(i)$: Menge nachfolgender Armelemente i in kinematischer Kette
$\boldsymbol{\phi}_i$: $6 \times n$ Bewegungsmatrix (Abhängig vom Gelenktyp)
$\boldsymbol{\tau}_i$: Generalisierte Kräfte/Momente an i

RNEA: Zusammenfassung

1. Rekursive Berechnung der **Geschwindigkeit** und **Beschleunigung** jedes einzelnen Armelements i von der Basis bis zum Endeffektor

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{p(i)} + \boldsymbol{\phi}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i \qquad \text{mit} \quad \mathbf{v}_0 = 0$$

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{p(i)} + \boldsymbol{\phi}_i \ddot{\boldsymbol{q}}_i + \dot{\boldsymbol{\phi}}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i \qquad \text{mit} \quad \mathbf{a}_0 = -\mathbf{a}_g$$

2. Berechnung der **Kräfte/Momente** jedes einzelnen Armelements i mithilfe **Newton-Euler**:

$$\mathbf{f}_i^{\mathrm{a}} = \boldsymbol{I}_i \mathbf{a}_i + \mathbf{v}_i \times \boldsymbol{I}_i \mathbf{v}_i$$

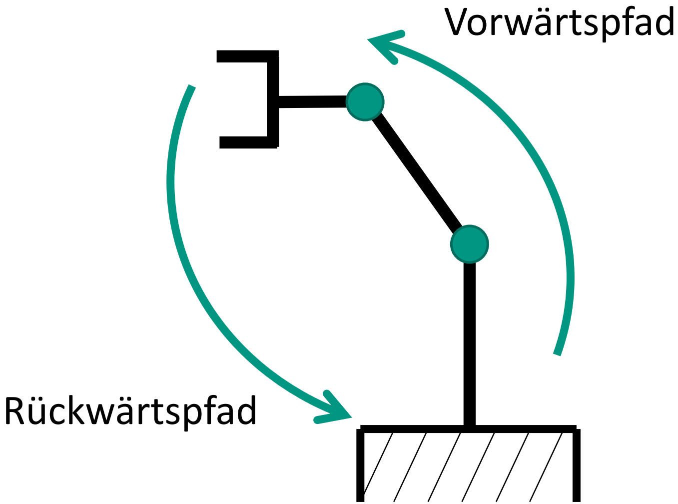
3. Rekursive Berechnung/Aufsummierung der Kräfte **zwischen den Armelementen** und der **generalisierten Kräfte** für den jeweiligen Gelenktyp

$$\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{f}_i \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^{\mathrm{a}} - \mathbf{f}_i^{\mathbf{e}} + \sum_{j \,\epsilon c(i)} \mathbf{f}_j$$

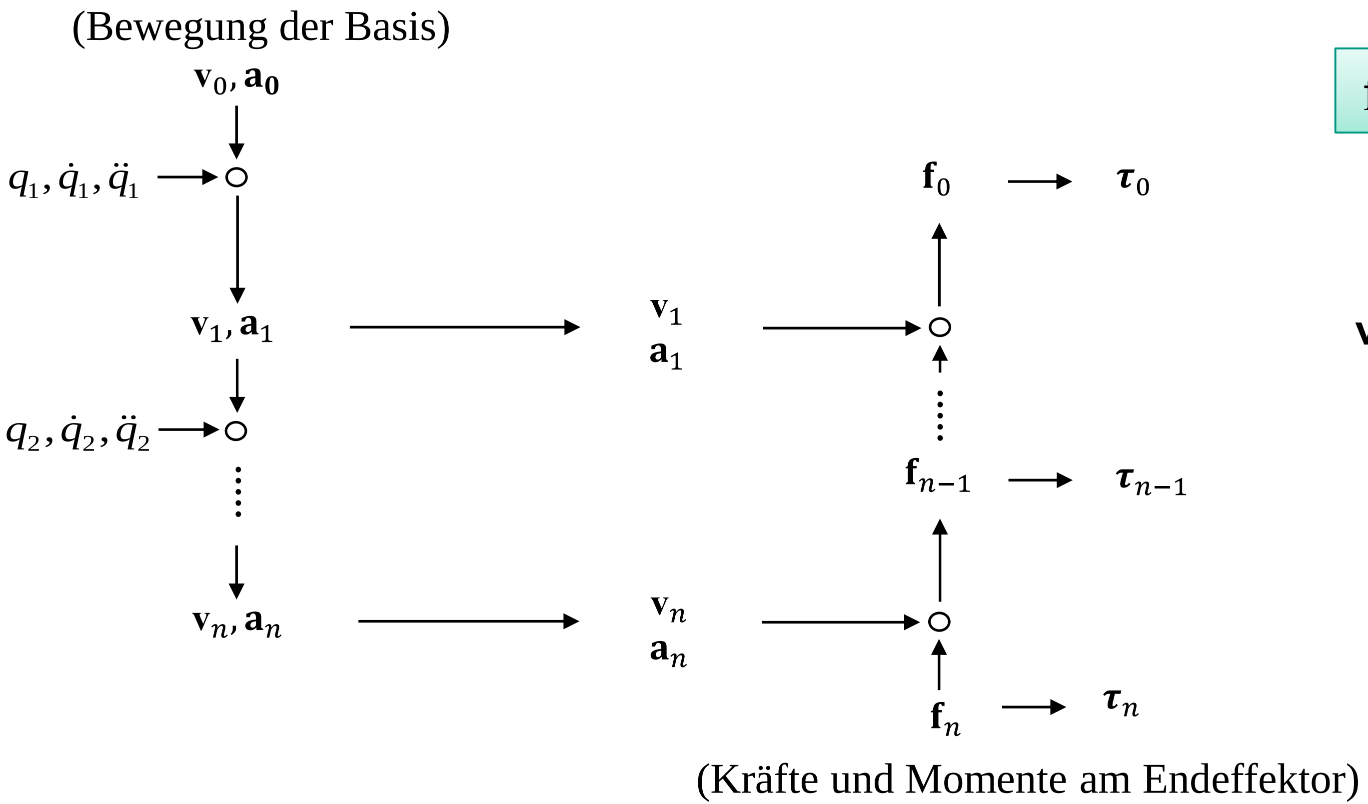
Rekursiver Newton-Euler Algorithmus (RNEA)

- **Vollständiger Algorithmus**

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v}_0 = 0\\
&\mathbf{a}_0 = -\mathbf{a}_g\\
&\textbf{for } i = 1 \textbf{ to } n \textbf{ do}\\
&\quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{p(i)} + \boldsymbol{\phi}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i\\
&\quad \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{p(i)} + \boldsymbol{\phi}_i \ddot{\boldsymbol{q}}_i + \dot{\boldsymbol{\phi}}_i \dot{\boldsymbol{q}}_i\\
&\quad \mathbf{f}_i = \boldsymbol{I}_i \mathbf{a}_i + \mathbf{v}_i \times \boldsymbol{I}_i \mathbf{v}_i - \mathbf{f}_i^{\mathbf{e}}\\
&\textbf{end for}\\
&\textbf{for } i = \mathrm{n} \textbf{ to } 1 \textbf{ do}\\
&\quad \boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{f}_i\\
&\quad \textbf{if } p(i) \neq 0 \textbf{ then}\\
&\quad\quad \mathbf{f}_{p(i)} = \mathbf{f}_{p(i)} + \mathbf{f}_i\\
&\quad \textbf{end if}\\
&\textbf{end for}
\end{aligned}
$$



Methode nach Newton-Euler: Zusammenfassung



$$\boxed{\mathbf{f} = \boldsymbol{I}\mathbf{a} + \mathrm{v} \times \boldsymbol{I}\mathbf{v}}$$

wobei

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v}_C \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \dot{\boldsymbol{v}}_C \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_C \\ \boldsymbol{f} \end{pmatrix}$$

Methode nach Newton-Euler: Eigenschaften

- Eigenschaften
  - Beliebige Anzahl von Gelenken
  - Belastungen der Armelemente werden berechnet
  - Aufwand $O(n)$ (n: Anzahl der Gelenke)
  - Rekursion

Inhalt

- Dynamisches Modell
- Generalisierte Koordinaten
- Modellierung der Dynamik
  - Methode nach Lagrange
  - Methode nach Newton-Euler
- **Herausforderungen der Dynamik**

Herausforderungen der Dynamik

- Die vorgestellten Methoden zur Modellierung der Dynamik (Lagrange und Newton-Euler) sind nur Approximationen der Dynamik
- Nichtlineare Kräfte (wie z.B. Reibung) können nicht direkt modelliert werden, haben jedoch einen großen Einfluss:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + g(\boldsymbol{q}) + \epsilon(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})}$$

$\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}$:	$n \times 1$	Vektor der generalisierten Koordinaten (Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung)
$\boldsymbol{\tau}$:	$n \times 1$	Vektor der generalisierten Kräfte
$M(\boldsymbol{q})$:	$n \times n$	Massenträgheitsmatrix (symmetrisch, positiv-definit)
$C(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$:	$n \times 1$	Vektor mit Zentripetal- und Corioliskomponenten
$g(\boldsymbol{q})$:	$n \times 1$	Vektor der Gravitationskomponenten
$\epsilon(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})$:	$n \times 1$	Nichtlineare Effekte, wie z.B. Reibung

Herausforderungen der Dynamik

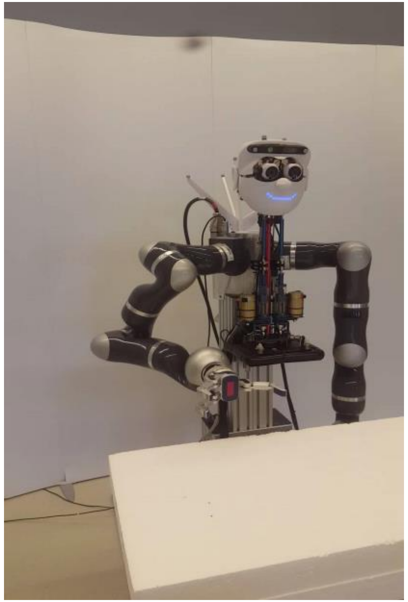
- Die Dynamik eines Roboters kann sich im Laufe der Zeit stark verändern
  z.B. durch
  - Abnutzung
  - Materialänderung (Dehnung, usw.)

- Die Dynamik variiert stark in Abhängigkeit von der auszuführenden Aufgabe
  Beispiele:
  - Interaktion mit der Umwelt
  - Greifen und Manipulieren von Objekten
  - Verwendung von Werkzeugen

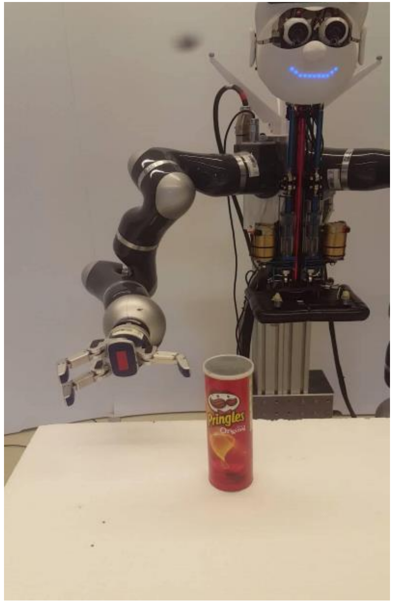
Lernen von Dynamik

- Dynamik hängt sehr stark von der auszuführenden Aufgabe ab (hier: „Pick and Place“)

ohne Objekt

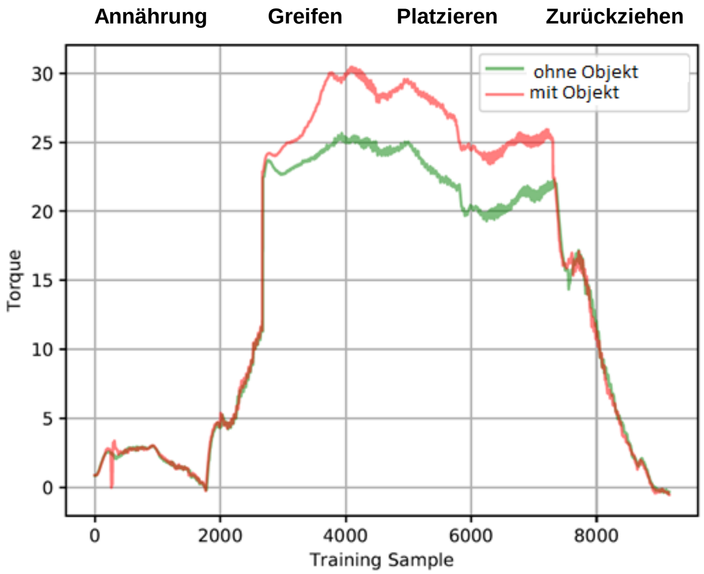


mit Objekt (851g)



Lernen der Dynamik

- Die „Pick and Place"-Aufgabe kann in mehrere Phasen unterteilt werden:
    1. **Annäherung** an das Objekt
    2. **Greifen** des Objekts
    3. **Platzieren** des Objekts
    4. **Zurückziehen** vom Objekt



- Das Diagramm zeigt, dass die Drehmomente mit bzw. ohne Objekt stark voneinander abweichen

→ Dynamik muss während der Aufgabe adaptiert oder gelernt werden

Hitzler, K., Meier, F., Schaal, S. and Asfour, T., *Learning and Adaptation of Inverse Dynamics Models: A Comparison*, IEEE/RAS International Conference on Humanoid Robots (Humanoids), October, 2019

Lernen der Kinematik und Dynamik